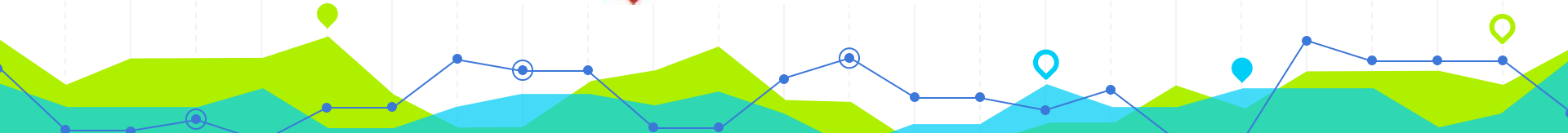




Lisbon School
of Economics
& Management

Universidade de Lisboa



Estatística II

Licenciatura em Gestão do Desporto
2.º Ano/2.º Semestre
2025/2026

Aulas Teórico-Práticas N.º 5 e 6 (Semana 3)

Docente: Elisabete Fernandes

E-mail: efernandes@iseg.ulisboa.pt



<https://doity.com.br/estatistica-aplicada-a-nutricao>



<https://basiccode.com.br/produto/informatica-basica/>

Conteúdos Programáticos

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 1 a 3)

- **Capítulo 1:** Revisões e Distribuições de Amostragem

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 4 a 7)

- **Capítulo 2:** Estimação

Aulas Teórico-Práticas (Semanas 7 a 9)

- **Capítulo 3:** Testes de Hipóteses

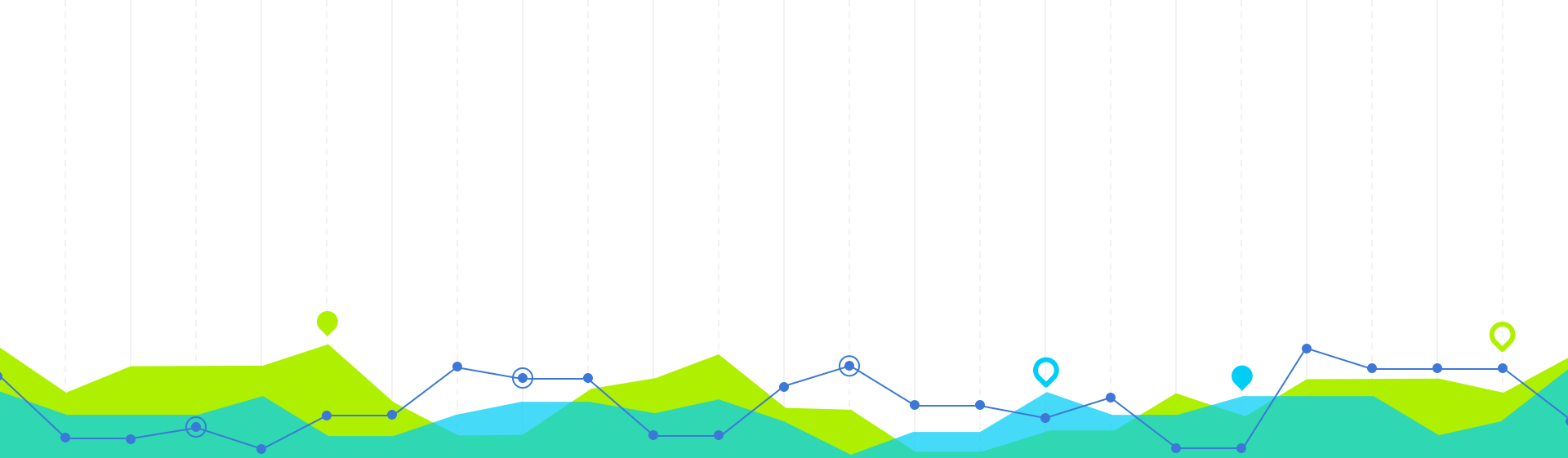
Aulas Teórico-Práticas (Semanas 10 a 13)

- **Capítulo 4:** Modelo de Regressão Linear Múltipla

Material didático: Exercícios do Livro Murteira et al (2015), Formulário e Tabelas Estatísticas

Bibliografia: B. Murteira, C. Silva Ribeiro, J. Andrade e Silva, C. Pimenta e F. Pimenta; *Introdução à Estatística*, 2ª ed., Escolar Editora, 2015.

<https://cas.iseg.ulisboa.pt>



Proporção Amostral

Distribuições de Amostragem

1

Proporção Amostral

Seja $X_1, X_2, \dots, X_n$, uma a. a. duma população Bernoulli com probabilidade de sucesso p , em que X_i toma o valor 1 se for um sucesso e o valor 0 se for um insucesso. A **proporção amostral** de sucessos é dada por:

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^n \frac{X_i}{n}.$$

Propriedades:

- $\mu_{\bar{P}} = E(\bar{P}) = p.$
- $\sigma_{\bar{P}}^2 = Var(\bar{P}) = \frac{p(1-p)}{n}.$

Proporção Amostral

Se a dimensão da amostra for pequena então sabe-se que,

$$P\left(\sum_{i=1}^n X_i = x\right) = {}^nC_x p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n, \text{ com } 0 < p < 1,$$

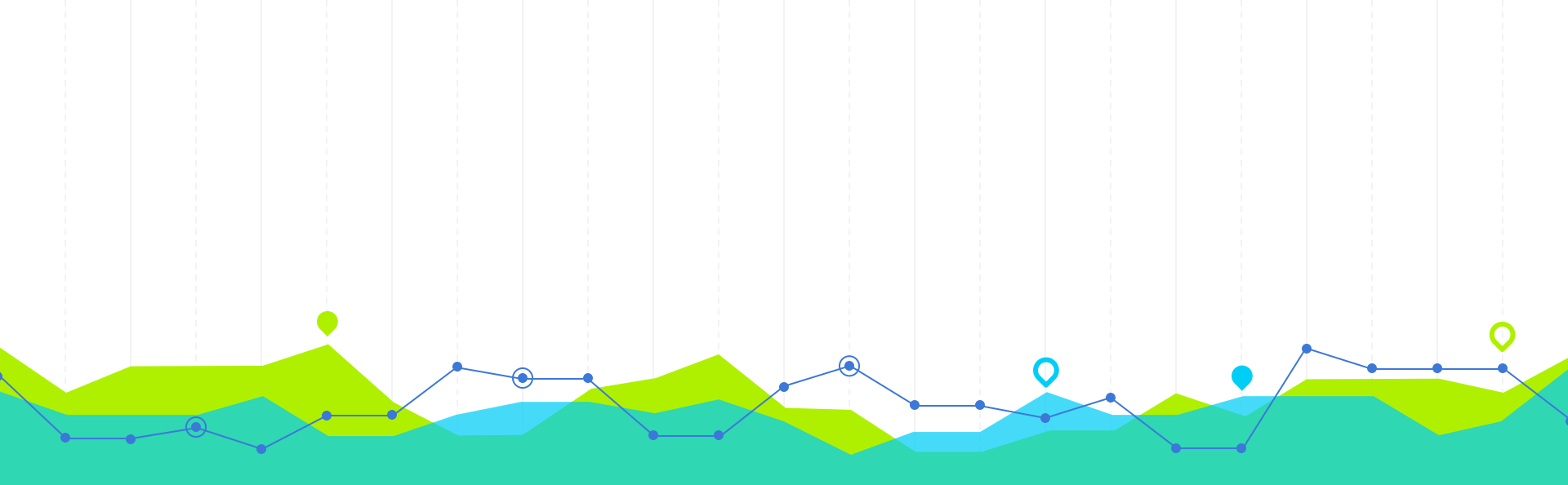
pelo que

$$P(\bar{P} = a) = P(X = na) = {}^nC_{na} p^{na} (1-p)^{n-na}, \quad a = 0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n}.$$

Se a dimensão da amostra for grande então, pelo Teorema de Moivre-Laplace (i.e., variante do T. L. C. para a distribuição Binomial),

$$\bar{P} \overset{\circ}{\sim} N\left(p; \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right), \text{ ou seja, } Z = \frac{\bar{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{\circ}{\sim} N(0; 1).$$

Observação: Esta aproximação tem sido muitas vezes criticada, pois tem mostrado resultados consideravelmente insatisfatórios e, apenas, continua a ser usada dada a sua simplicidade e implementação nos diversos programas estatísticos. Recomenda-se especial atenção se a proporção for tendencialmente pequena ou grande, i.e., valores próximos de 0 ou de 1 (Pires e Amado, 2008).



Proporção Amostral: Exercícios

Distribuições de Amostragem

2

Numa dada Repartição de Finanças, sabe-se que 70% dos contribuintes pagam o IUC (Imposto Único de Circulação) dentro do prazo.

- a) Qual a probabilidade de numa amostra de 35 IUC, pelo menos 65% terem sido pagos dentro do prazo?
- b) Para a probabilidade da alínea anterior ser no mínimo 80%, qual deve ser a dimensão mínima da amostra a recolher (admita que a amostra será de grande dimensão)?

[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)



Exercício: Proporção Amostral

Sejam:

- X_i a v. a. que designa se o contribuinte i paga o IUC dentro do prazo, $i = 1, \dots, n$,
- $\bar{P}$ a v.a. que representa a proporção de contribuintes que pagam o IUC dentro do prazo, em n contribuintes.

$p = 0,7$.

a)

$$\begin{array}{l} X \text{ distribuição Bernoulli} \\ n (= 35) \text{ grande} \end{array} \quad \left| \Rightarrow Z = \frac{\bar{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \overset{\circ}{\sim} N(0; 1). \right.$$

$$P(\bar{P} \geq 0,65) = 1 - P(\bar{P} < 0,65) = 1 - P\left(Z < \frac{0,65 - 0,7}{\sqrt{\frac{0,7 \times 0,3}{35}}}\right) = 1 - \Phi(-0,65) = \Phi(0,65) = 0,7422.$$

Exercício: Proporção Amostral

b) $n = ?$

$$P(\bar{P} \geq 0,65) \geq 0,8 \Leftrightarrow 1 - P(\bar{P} < 0,65) \geq 0,8 \Leftrightarrow P\left(Z < \frac{0,65 - 0,7}{\sqrt{\frac{0,7 \times 0,3}{n}}}\right) \leq 0,2 \Leftrightarrow \Phi(-0,11\sqrt{n}) \leq 0,2$$

$$\Leftrightarrow \Phi(0,11\sqrt{n}) \geq 0,8$$

Como $\Phi(0,84) \approx 0,8$

$$\Leftrightarrow 0,11\sqrt{n} \geq 0,84 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq 7,6364 \Rightarrow n \geq 58,3 \Rightarrow n \geq 59.$$

19. Da experiência passada apurou-se que em 5% das declarações de IRS entregues constam deduções ilegais. Para efeitos de controlo foram examinadas 1000 declarações escolhidas casualmente de entre todas as entregues. Supondo que se mantém o padrão de anos anteriores, calcule a probabilidade de pelo menos 60 terem esse tipo de ilegalidade.



Exercício 19

$$X = \begin{cases} 1, & \text{se IRS tem deduções ilegais} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\Rightarrow X \sim B(1, \theta), \text{ onde } \theta = 0.05$$

$$X \sim B(1, 0.05)$$

Amostra casual: $(X_1, X_2, \dots, X_{1000})$, $n = 1000$

$$\text{Quer-se: } P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i \geq 60\right), \text{ onde } \sum_{i=1}^{1000} X_i \sim B(1000, 0.05)$$

Resultado exacto

$$P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i \geq 60\right) = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{1000} X_i \leq 59\right) \approx 0.08673$$

Exercício 19

Resultado Aproximado pelo TLC:

$$Z = \frac{\bar{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \sim N(0; 1).$$

$$P(\bar{P} \geq 60/1000) = P\left(Z \geq \frac{0,06 - 0,05}{\sqrt{\frac{0,05 \times (1 - 0,05)}{1000}}}\right) = 1 - \Phi(1,451) \sim 1 - 0,9265 = 0,0735$$

24. Num clube desportivo, a proporção de adeptos com opinião favorável sobre a direcção é de 75%.
- a) Em 1000 adeptos seleccionados casualmente qual é, aproximadamente, a probabilidade de se observarem menos de 720 com opinião favorável à direcção?
 - b) Qual deverá ser a dimensão mínima de uma amostra casual de adeptos para que o desvio entre a frequência relativa da amostra e a verdadeira proporção de adeptos favoráveis à direcção não atinja 0.02 em pelo menos 95% dos casos?



Exercício 24 a)

Resultado Aproximado pelo TLC:

$$Z = \frac{\bar{P} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \stackrel{\circ}{\sim} N(0; 1).$$

$$\begin{aligned} P(\bar{P} < 720/1000) &= P\left(Z < \frac{0,72 - 0,75}{\sqrt{\frac{0,75 \times (1 - 0,75)}{1000}}}\right) = \Phi(-2,191) \\ &= 1 - \Phi(2,191) \sim 1 - 0,9857 = 0,0143 \end{aligned}$$

Exercício 24 (b)

Quer-se o menor n tal que $P(|\bar{X} - \theta| < 0.02) \geq 0.95$

Pelo TLC: $Z = \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} \sim N(0,1)$

Logo,

$$P(|\bar{X} - \theta| < 0.02) \geq 0.95 \Rightarrow P(-0.02 < \bar{X} - \theta < 0.02) \geq 0.95 \Rightarrow$$

Exercício 24 (b)

$$\Rightarrow P\left(-\frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.25 \times 0.25}{n}}} < \frac{\bar{X} - \theta}{\sqrt{\frac{\theta(1-\theta)}{n}}} < \frac{0.02}{\sqrt{\frac{0.95 \times 0.25}{n}}}\right) \geq 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(-\frac{0.02 \sqrt{n}}{\sqrt{0.1875}} < Z < \frac{0.02 \sqrt{n}}{\sqrt{0.1875}}\right) \geq 0.95 \Rightarrow$$

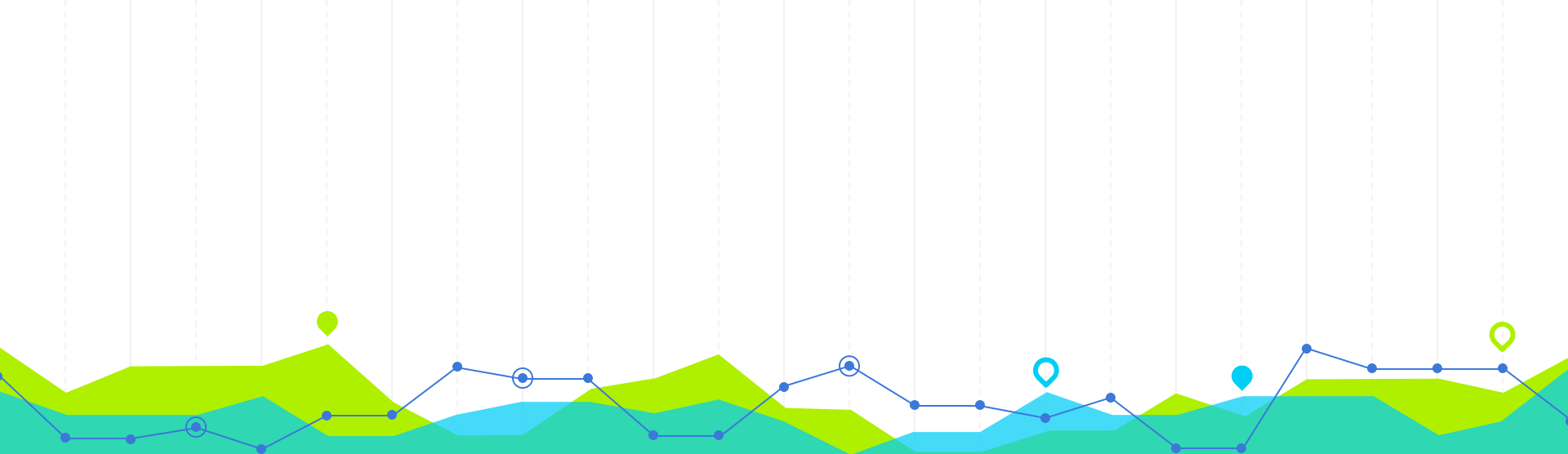
$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{0.02 \sqrt{n}}{\sqrt{0.1875}}\right) - \Phi\left(-\frac{0.02 \sqrt{n}}{\sqrt{0.1875}}\right) \geq 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{0.02 \sqrt{n}}{\sqrt{0.1875}}\right) - \left[1 - \Phi\left(\frac{0.02 \sqrt{n}}{\sqrt{0.1875}}\right)\right] \geq 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \Phi\left(\frac{0.02 \sqrt{n}}{\sqrt{0.1875}}\right) - 1 \geq 0.95 \Rightarrow \Phi\left(\frac{0.02 \sqrt{n}}{\sqrt{0.1875}}\right) \geq 0.975 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0.02 \sqrt{n}}{\sqrt{0.1875}} \geq 1.96 \Rightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1.96 \sqrt{0.1875}}{0.02} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{1.96 \sqrt{0.1875}}{0.02}\right)^2 = 1800.75 \rightarrow \boxed{n = 1801}$$



Diferença de Proporções Amostrais

Distribuições de Amostragem

3

Diferença de Proporções Amostrais

Sejam $X_{11}, X_{12}, \dots, X_{1n_1}$ e $X_{21}, X_{22}, \dots, X_{2n_2}$ duas a. a. independentes, de dimensão n_1 e n_2 retiradas de duas populações Bernoulli, com parâmetros p_1 e p_2 , respetivamente, em que X_{ij} toma o valor 1 se for um sucesso e o valor 0 se for um insucesso, e

$$\bar{P}_1 = \sum_{i=1}^{n_1} \frac{X_{1i}}{n_1} \text{ e } \bar{P}_2 = \sum_{i=1}^{n_2} \frac{X_{2i}}{n_2}.$$

Se as dimensões das amostras forem grandes, então pelo Teorema de Moivre Laplace tem-se:

$$\bar{P}_1 \overset{\circ}{\sim} N\left(p_1; \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1}}\right) \text{ e } \bar{P}_2 \overset{\circ}{\sim} N\left(p_2; \sqrt{\frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right),$$

Diferença de Proporções Amostrais

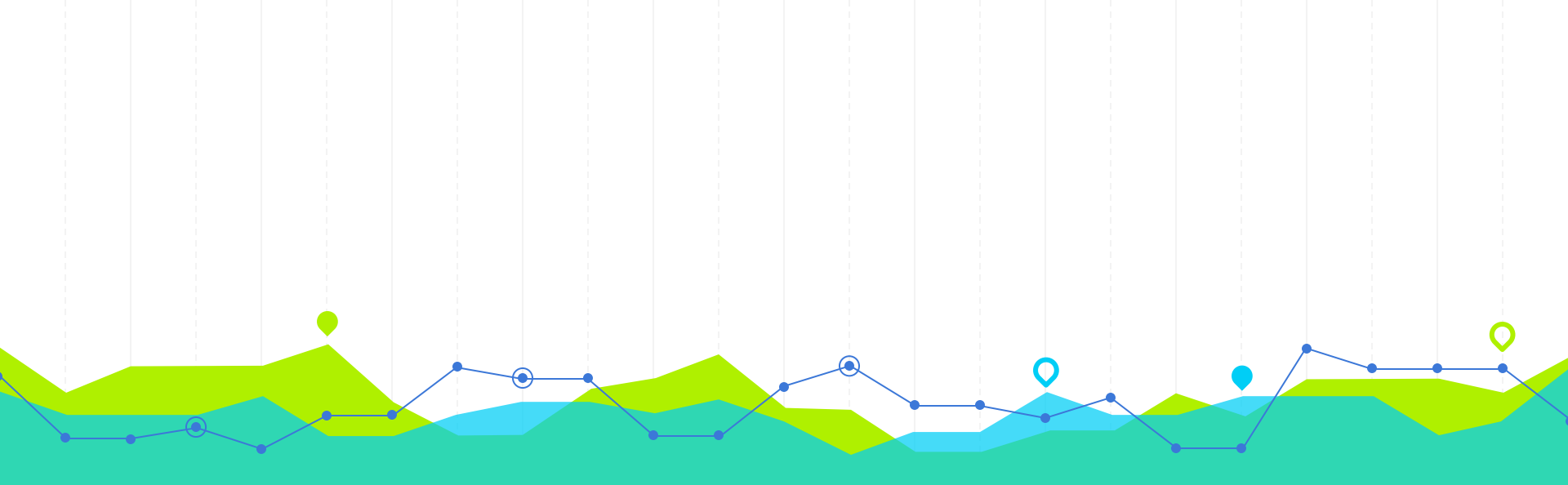
donde pelo Teorema da aditividade da distribuição Normal vem:

$$\bar{P}_1 - \bar{P}_2 \overset{\sim}{\sim} N\left(p_1 - p_2; \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}\right),$$

ou seja,

$$Z = \frac{(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \overset{\sim}{\sim} N(0; 1).$$

[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)



Diferença de Proporções Amostrais: Exercícios

Distribuições de Amostragem

4

A proporção de clientes que optaram pela marca de telemóveis *Noko* na loja *TeleMN* foi 0,35 e na loja *Optcel* foi 0,29. Calcule a probabilidade de, recolhendo uma amostra de 200 clientes na primeira loja e de 150 clientes na segunda, a proporção amostral de clientes que optaram pela marca *Noko* na loja *TeleMN* ser superior à da loja *Optcel*.

[ProbabilidadesEstatistica2019.pdf](#)



Exercício: Diferença de Proporções Amostrais

Sejam:

- X_{1i} a v. a. que designa se o cliente i optou pela marca *Noko* na loja *TeleMN*, $i = 1, \dots, n_1$.
- X_{2i} a v. a. que designa se o cliente i optou pela marca *Noko* na loja *Optcel*, $i = 1, \dots, n_2$.
- $\bar{P}_1$ a v. a. que representa a proporção de clientes que optaram pela marca *Noko* na loja *TeleMN*, em n_1 clientes
- $\bar{P}_2$ a v. a. que representa a proporção de clientes que optaram pela marca *Noko* na loja *Optcel*, em n_2 clientes.

$p_1 = 0,35$ e $p_2 = 0,29$.

$$\left. \begin{array}{l} X_1 \text{ e } X_2 \text{ dist. Bernoulli} \\ n_1 (= 200) \text{ e } n_2 (= 150) \text{ grandes} \end{array} \right\} \Rightarrow Z = \frac{(\bar{P}_1 - \bar{P}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}} \stackrel{\sim}{\sim} N(0; 1).$$

$$P(\bar{P}_1 > \bar{P}_2) = P(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 > 0) = 1 - P(\bar{P}_1 - \bar{P}_2 \leq 0) = 1 - P\left(Z \leq \frac{0 - (0,35 - 0,29)}{\sqrt{\frac{0,35(1-0,35)}{200} + \frac{0,29(1-0,29)}{150}}}\right)$$

$$= 1 - \Phi(-1,2) = 1 - (1 - \Phi(1,2)) = \Phi(1,2) = 0,8849.$$

27. Depois de uma vigorosa campanha publicitária a quota de mercado das batatas fritas “As Estaladiças” passou de 8% para 10%. Suponha que se tinham realizados 2 inquéritos por amostragem, um antes de se iniciar a campanha (amostra de dimensão 100) e outro duas semanas depois do final da campanha (amostra de dimensão 300).
- a) Qual a probabilidade de se concluir, recorrendo aos referidos inquéritos, que o ganho de quota de mercado tinha sido superior a 5 pontos percentuais?
 - b) Qual a probabilidade de os inquéritos concluírem por uma perda de quota de mercado?



Exercício 27 a)

Antes da campanha : $X_1 \sim B(1, 0.08)$ $\rightarrow$ Amostra : $m = 100$

Depois da campanha : $X_2 \sim B(1, 0.1)$ $\rightarrow$ Amostra : $n = 300$

Exercício 27 a)

(a)

quotas esperadas
nas amostras

$$\text{Quer-se } P(\hat{X}_2 - \hat{X}_1 > 0.05) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < -0.05)$$

$$\text{Sabe-se que: } Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{m} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n}}} \sim N(0,1), \text{ onde } \theta_1 = 0.08, \theta_2 = 0.1, \\ m = 100, n = 300$$

Logo,

$$P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 < -0.05) = P\left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{m} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n}}} < \frac{-0.05 - (0.08 - 0.1)}{\sqrt{\frac{0.08 \times 0.92}{100} + \frac{0.1 \times 0.9}{300}}}\right) =$$

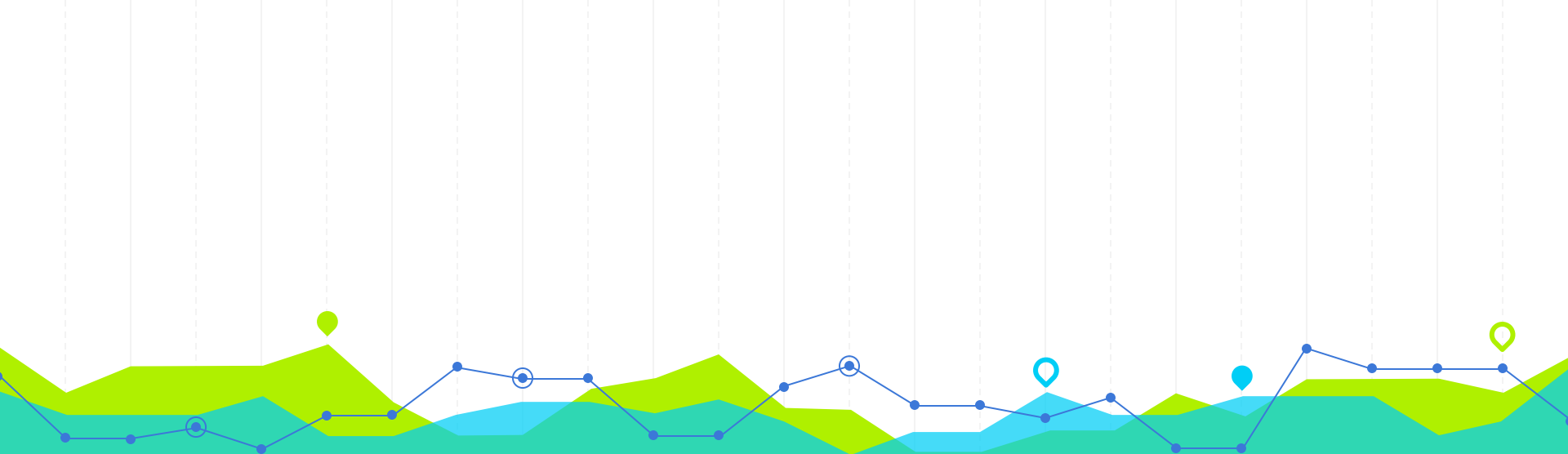
$$= P\left(Z < -\frac{0.03}{\sqrt{0.001036}}\right) \approx \Phi(-0.93) = 1 - \Phi(0.93) \approx 1 - 0.8238 = 0.1762$$

Exercício 27 b)

$$P(\bar{X}_1 > \bar{X}_2) = P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 > 0) = 1 - P\left(\frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - (\theta_1 - \theta_2)}{\sqrt{\frac{\theta_1(1-\theta_1)}{n_1} + \frac{\theta_2(1-\theta_2)}{n_2}}} \leq \frac{0 - (0.08 - 0.1)}{\sqrt{\frac{0.08 \times 0.92}{100} + \frac{0.1 \times 0.9}{300}}}\right) =$$

$= 1 - P(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \leq 0)$

$$= 1 - P\left(Z \leq \frac{0.02}{\sqrt{0.001036}}\right) \approx 1 - \Phi(0.62) = 1 - 0.7324 = 0.2676$$



Distribuições do Mínimo e Máximo

Distribuições de Amostragem

5

Estatísticas de Ordem: Distribuição do Mínimo e Distribuição do Máximo

$$P(X_{(1)} \leq x) = 1 - P(X_{(1)} > x) = 1 - [P(X_1 > x) \times \dots \times P(X_n > x)] = 1 - [1 - P(X < x)]^n = 1 - [1 - F(x)]^n$$

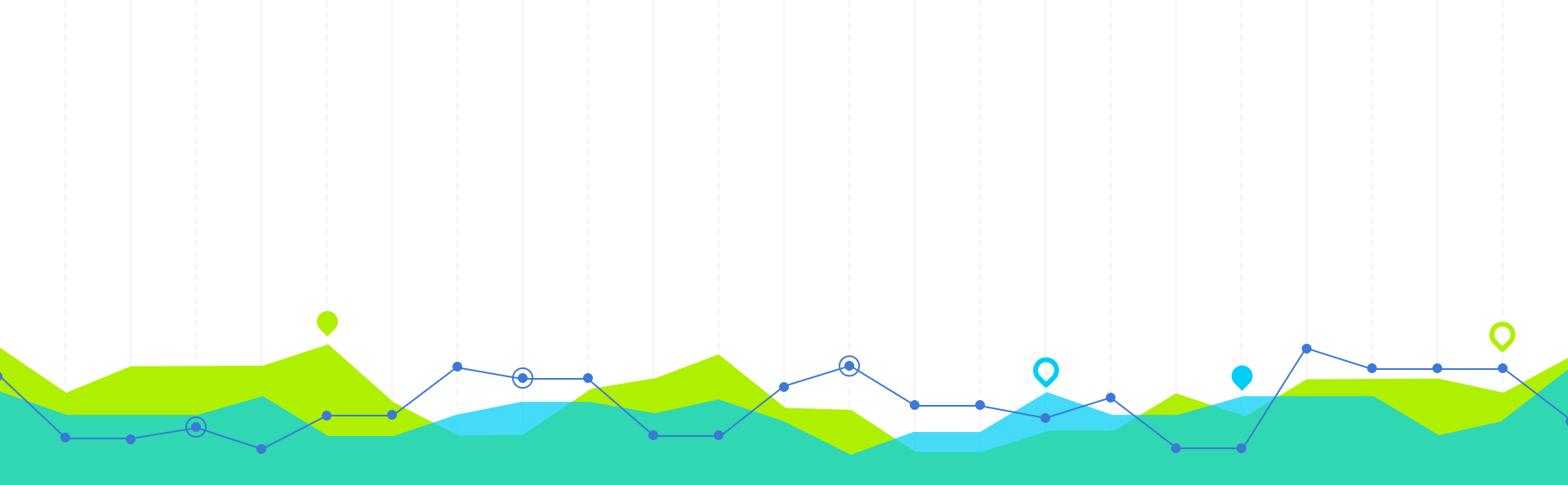
$$P(X_{(n)} \leq x) = P(X_1 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x) = P(X < x)^n = F(x)^n$$

Distribuições de Amostragem

Formulário

- **DISTRIBUIÇÃO DO MÍNIMO E DO MÁXIMO**

$$G_1(x) = 1 - [1 - F(x)]^n \quad ; \quad G_n(x) = [F(x)]^n$$



Distribuições do Mínimo e Máximo: Exercícios

Distribuições de Amostragem

6

13. O tempo que um aluno despende por dia no *messenger* tem distribuição exponencial com média 2 horas. Seleccionaram-se 5 dias ao acaso tendo-se observado o tempo despendido no *messenger* em cada um deles.

a) Calcule a probabilidade do tempo médio despendido no *messenger*, por dia, ser superior a 4 horas?

b) Qual a probabilidade de o tempo máximo despendido por dia, não ultrapassar 6 horas?



14. O tempo decorrido desde a participação da avaria até à reparação (tempo de reparação) de um certo tipo de máquina é uma variável aleatória com distribuição exponencial de média 4 horas.

- a) Em dez avarias participadas qual a probabilidade de o menor dos tempos de reparação ser superior a 2 horas? E do maior dos tempos de reparação não ultrapassar as 8 horas?
- b) Numa amostra casual de 40 avarias qual a probabilidade da média dos tempos de reparação ser inferior a 5.1 horas?



Obrigada!

Questões?

